



SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL
UNI



Álgebra

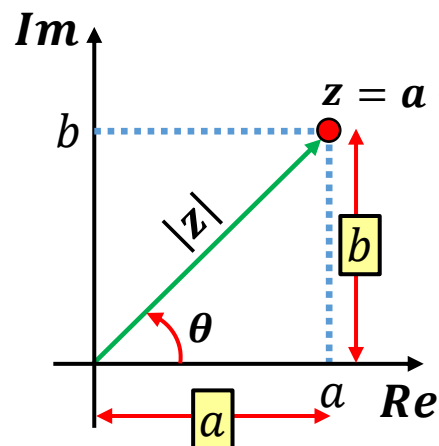
Tema: Números complejos II

Docente: Gustavo Poma Quiroz

FORMA POLAR Y EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ tal que $a > 0 \wedge b > 0$

Graficamos z en el **PLANO COMPLEJO**.



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$b = |z| \operatorname{sen} \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$a = |z| \cos \theta$$

Como $z = a + bi$

$$z = |z| \cos \theta + |z| \operatorname{sen} \theta \cdot i$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{Forma polar}$$

θ : Argumento de z (**Arg(z)**) $0 \leq \theta < 2\pi$

Observación

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \operatorname{cis} \theta = e^{i\theta}$$

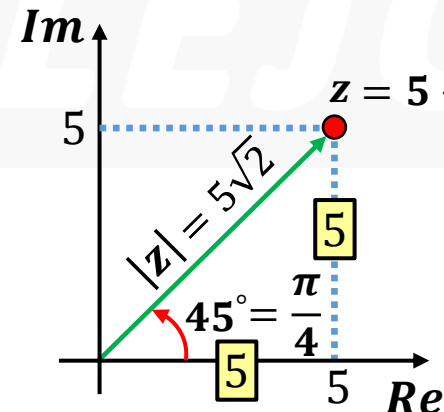
$$z = |z| \operatorname{cis}(\theta) \quad \text{Forma cis}$$

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \text{Forma exponencial}$$

Ejemplos

Expresa en las otras formas los siguientes números:

① $z = 5 + 5i$

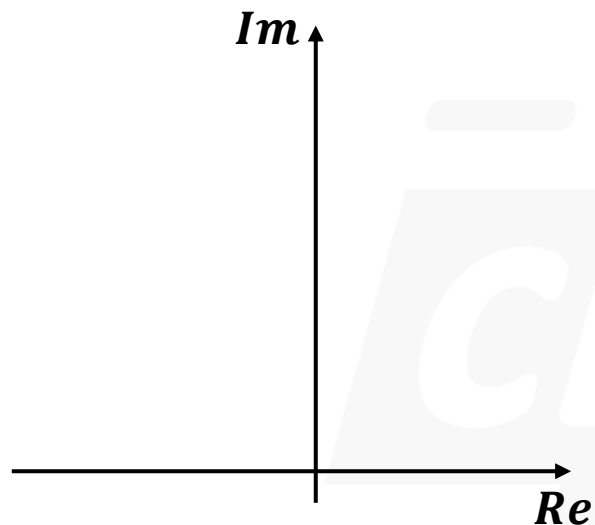


$$z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z = 5\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$z = 5\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

② $w = -2 + 2\sqrt{3}i$



COMPLEJOS NOTABLES

$$1 = (\cos 0 + i \sin 0) = \text{cis}(0) = e^{0i}$$

$$-1 = (\cos \pi + i \sin \pi) = \text{cis}(\pi) = e^{\pi i}$$

$$i = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \text{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right) = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$-i = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \text{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

TEOREMAS

Sean los números complejos z y w no nulos.

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|\operatorname{cis}(\theta) = |z|e^{\theta i}$$

$$w = |w|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = |w|\operatorname{cis}(\alpha) = |w|e^{\alpha i}$$

Donde se cumple:

$$\mathbf{z \cdot w = \left\{ \begin{array}{l} |z| \cdot |w| [\cos(\theta + \alpha) + i\operatorname{sen}(\theta + \alpha)] \\ |z| \cdot |w| \operatorname{cis}(\theta + \alpha) \\ |z| \cdot |w| e^{(\theta + \alpha)i} \end{array} \right.}$$

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{|z|}{|w|} [\cos(\theta - \alpha) + i\operatorname{sen}(\theta - \alpha)] \\ \frac{|z|}{|w|} \operatorname{cis}(\theta - \alpha) \\ \frac{|z|}{|w|} e^{(\theta - \alpha)i} \end{array} \right.$$

Ejemplos

Sean los números complejos

$$z = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{y} \quad w = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\mathbf{z \cdot w =}$$

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} =$$

TEOREMA DE MOIVRE

Dado el número complejo no nulo

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Se tiene ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{I. } z^n = \begin{cases} |z|^n [\cos(\theta n) + i\operatorname{sen}(\theta n)] \\ |z|^n \operatorname{cis}(\theta n) \\ |z|^n e^{(\theta n)i} \end{cases}$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} \text{1. } (\cos 36^\circ + i\operatorname{sen} 36^\circ)^5 &= \cos(36^\circ \cdot 5) + i\operatorname{sen}(36^\circ \cdot 5) \\ &= \cos(180^\circ) + i\operatorname{sen}(180^\circ) \\ &= -1 + i \cdot 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{2. } \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{12} =$$

$$\text{3. } \left(4e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)^6 =$$

Aplicación

Reducir el siguiente complejo:

$$Z = \frac{(Cis\ 12^\circ)^4 \cdot (5\ Cis\ 16^\circ)^5}{(5\ Cis\ 7^\circ)^3 \cdot (Cis\ 35^\circ)^2}$$

indique $Re(Z) + Im(Z)$

- A) 26 B) 35 C) 44 D) 68 E) 76

Resolución

II.

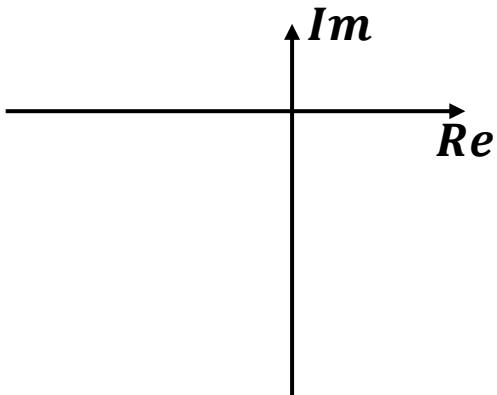
$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \\ \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ \sqrt[n]{|z|} e^{\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) i} \end{cases}$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Aplicación

Si $z = -\sqrt{3} - i$, calcule $\sqrt[4]{z}$.

Resolución

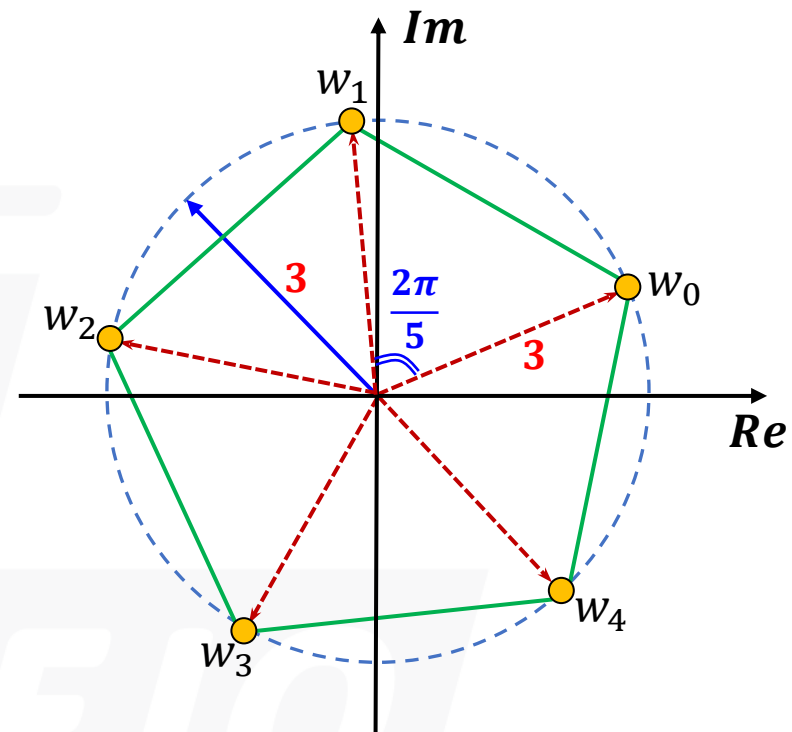


Aplicación

Calcule el área del polígono que se forma al unir

los afijos de $w = \sqrt[5]{243} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$

Resolución



PROPIEDADES

- | | |
|------|--|
| I. | $\text{Arg}(z \cdot w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$ |
| II. | $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)$ |
| III. | $\text{Arg}(z^n) = n \cdot \text{Arg}(z)$ |

Aplicación

$$\text{Si } |\bar{z}(1+i)| = 3\sqrt{2}; \quad \text{Arg}[z^2 \cdot (\sqrt{3} + i)] = \frac{2\pi}{3}$$

entonces el número z en su forma polar es:

Resolución

RESULTADOS IMPORTANTES

$$|\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta| = |\operatorname{cis}\theta| = |e^{i\theta}| = 1$$

$$\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) = \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$\frac{1}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Si } z = |z|\operatorname{cis}(\theta) \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = |z|\operatorname{cis}(-\theta) \\ z^* = |z|\operatorname{cis}(\theta + \pi) \end{cases}$$

$$e^{x+yi} = e^x \operatorname{cis}(y)$$

Aplicaciones

Indique el módulo y argumento de los siguientes números complejos:

$$\diamond \cos 30^\circ - i\operatorname{sen} 30^\circ =$$

$$\diamond -3e^{\frac{\pi}{5}i} =$$

$$\diamond e^{3+4i} =$$



GRACIAS

SÍGUENOS:   

academiacesarvallejo.edu.pe